Deutsch

Baltic Way 2009

Trondheim, 7. November 2009

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Während der ersten 30 Minuten können Fragen gestellt werden.

Aufgabe 1. Ein Polynom $p(x)$ vom Grad $n \geq 2$ hat genau n reelle Nullstellen, gezählt mit Vielfachheiten. Wir wissen, dass der Koeffizient von x^n den Wert 1 hat, dass alle Nullstellen kleiner oder gleich 1 sind und dass $p(2) = 3^n$ ist. Welche Werte kann $p(1)$ annehmen?

Aufgabe 2. Seien a_1, a_2, …, a_{100} nicht-negative ganze Zahlen, die die Ungleichung

$$a_1 \cdot (a_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_1 - 20) + a_2 \cdot (a_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_2 - 20) + \\ \ldots + a_{100} \cdot (a_{100} - 1) \cdot \ldots \cdot (a_{100} - 20) \leq 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 79$$

erfüllen. Man beweise: $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} \leq 9900$.

Aufgabe 3. Sei n eine positive ganze Zahl. Man zeige, dass man Zahlen $c_k \in \{-1, 1\}$ $(1 \leq k \leq n)$ so wählen kann, dass folgende Ungleichung gilt:

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot k^2 \leq 4.$$

Aufgabe 4. Man bestimme alle ganzen Zahlen $n > 1$, für die die Ungleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})x_n$$

für alle reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erfüllt ist.

Aufgabe 5. Seien $f_0 = f_1 = 1$ und $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$ $(i \geq 0)$. Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung

$$x^{2010} = f_{2009} \cdot x + f_{2008}\,.$$

Aufgabe 6. Seien a und b ganze Zahlen, so dass die Gleichung $x^3 - ax^2 - b = 0$ drei ganzzahlige Lösungen hat. Man beweise: $b = dk^2$, wobei d und k ganzzahlig sind und $d \mid a$ gilt.

Aufgabe 7. Die Primzahl p und die ganzen Zahlen a, b, c sollen die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$6 \mid p + 1, \quad p \mid a + b + c, \quad p \mid a^4 + b^4 + c^4.$$

Man beweise, dass dann $p \mid a, b, c$ gilt.

Aufgabe 8. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die es eine Zerlegung der Menge

$$\{n, n+1, n+2, \ldots, n+8\}$$

in zwei Teilmengen derart gibt, dass das Produkt aller Elemente der ersten Teilmenge gleich dem Produkt aller Elemente der zweiten Teilmenge ist.

Aufgabe 9. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die $2^{n+1} - n^2$ eine Primzahl ist.

Aufgabe 10. Es bezeichne $d(k)$ die Anzahl der positiven Teiler der positiven ganzen Zahl k. Man beweise, dass es unendlich viele positive ganzen Zahlen m gibt, für die keine positive ganze Zahl n existiert, so dass

$$m = \left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2$$

erfüllt ist.

Aufgabe 11. Sei M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ eines Dreiecks ABC. Sei K ein Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{BA}$ jenseits von A. Die Gerade KM schneide die Seite $\overline{BC}$ im Punkt L. P sei derjenige Punkt auf der Strecke $\overline{BM}$, für die PM die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle LPK$ ist. Die Gerade ℓ sei die Parallele zu BM durch A. Man zeige, dass die Projektion des Punktes M auf ℓ auf der Geraden PK liegt.

Aufgabe 12. In einem Viereck $ABCD$ gelte $AB \parallel CD$ und $|\overline{AB}| = 2\,|\overline{CD}|$. Die Gerade ℓ sei die Senkrechte zu CD durch den Punkt C. Der Kreis mit dem Mittelpunkt D und dem Radius $|\overline{DA}|$ schneide die Gerade ℓ in den Punkten P und Q. Man beweise, dass dann $AP \perp BQ$ gilt.

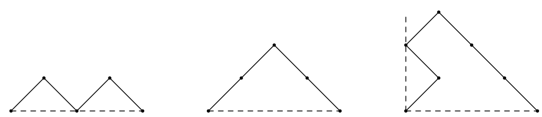
Aufgabe 13. Der Punkt H ist der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ABC mit den Höhen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$. Die Punkte I_1, I_2 und I_3 sind die Inkreismittelpunkte der Dreiecke EHF, FHD bzw. DHE. Man beweise, dass die Geraden AI_1, BI_2 und CI_3 durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

Aufgabe 14. Für welche $n \geq 2$ ist es möglich, n paarweise nicht-ähnliche Dreiecke $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zu finden, so dass jedes von ihnen in n paarweise nicht-ähnliche Dreiecke zerlegt werden kann, die jeweils zu einem der ursprünglichen Dreiecke $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ähnlich sind?

Aufgabe 15. Ein Einheitsquadrat wird in m Vierecke $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ zerlegt. Für jedes $i = 1, 2, \ldots, m$ bezeichne S_i die Summe der Quadrate der vier Seiten von Q_i. Man beweise:

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_m \geq 4.$$

Aufgabe 16. Ein *n-trønder walk* ist ein Weg, der in $(0,0)$ beginnt, in $(2n,0)$ endet, keine Selbstüberschneidung aufweist, den ersten Quadranten nicht verlässt und bei dem die einzelnen Wegstrecken jeweils einer der Vektoren $(1,1)$, $(1,-1)$ oder $(-1,1)$ sind. (Die Abbildung zeigt die möglichen 2-trønder walks.) Man bestimme die Anzahl der n-trønder walks.



Aufgabe 17. Man bestimme die größte ganze Zahl n, für die es n verschiedene ganze Zahlen gibt, von denen keine durch 7, 11 oder 13 teilbar ist, aber bei denen die Summe von je zweien durch mindestens eine der drei Zahlen 7, 11 und 13 teilbar ist.

Aufgabe 18. Sei $n > 2$ eine ganze Zahl. In einem Land gibt es n Städte, die jeweils durch eine direkte Straße verbunden sind. Jede der Straßen bekommt eine Zahl aus der Menge $\{1, 2, \ldots, m\}$ zugeordnet, wobei verschiedene Straßen die selbe Zahl erhalten können. Die *Priorität* einer Stadt ist die Summe der Zahlen aller Straßen, die zu dieser Stadt führen. Man bestimme die kleinste Zahl m, für die es möglich ist, dass alle Städte eine unterschiedliche Priorität aufweisen.

Aufgabe 19. Bei einer Party mit acht Personen kennen sich je zwei Personen oder sie kennen sich nicht. Jede Person kennt genau drei der anderen. Man untersuche, ob die beiden folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden können:

- Für je drei Personen gilt, dass sich mindestens zwei von ihnen nicht kennen.
- Für je vier Personen gilt, dass sich mindestens zwei von ihnen kennen.

Aufgabe 20. In der zukünftigen Stadt Baltic Way gibt es 16 Krankenhäuser. In jeder Nacht haben jeweils genau vier von ihnen Bereitschaftsdienst. Ist es möglich, einen Einsatzplan so aufzustellen, dass nach 20 Nächten jedes Paar von Krankenhäusern genau einmal gemeinsam Dienst hatten?