Icelandic version

Baltic Way 2009

Þrándheimur, 7. nóvember, 2009

Tímamörk: $4\frac{1}{2}$ klukkustund.

Spurningar eru leyfðar fyrstu 30 mínúturnar.

Problem 1. Margliða $p(x)$ af stigi $n \geq 2$ hefur nákvæmlega n rauntölurætur, sumar hugsanlega taldar margfaldar. Við vitum að stuðullinn við x^n er 1, allar ræturnar eru minni eða jafnar 1, og $p(2) = 3^n$. Hvaða gildi getur $p(1)$ tekið?

Problem 2. Látum $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ vera heiltölur sem eru ekki neikvæðar og uppfylla ójöfnuna

$$a_1 \cdot (a_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_1 - 20) + a_2 \cdot (a_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_2 - 20) + \\ \ldots + a_{100} \cdot (a_{100} - 1) \cdot \ldots \cdot (a_{100} - 20) \leq 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 79.$$

Sannið að $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} \leq 9900$.

Problem 3. Látum n vera gefna jákvæða heiltölu. Sýnið að við getum valið tölur $c_k \in \{-1, 1\}$ $(1 \leq k \leq n)$ þannig að

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot k^2 \leq 4.$$

Problem 4. Ákvarðið allar heiltölur $n > 1$ þannig að ójafnan

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})x_n$$

sé uppfyllt fyrir allar rauntölur $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Problem 5. Látum $f_0 = f_1 = 1$ og $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$ $(i \geq 0)$. Finnið allar rauntölulausnir á jöfnunni

$$x^{2010} = f_{2009} \cdot x + f_{2008}\,.$$

Problem 6. Látum a og b vera heiltölur þannig að jafnan $x^3 - ax^2 - b = 0$ hafi þrjár heiltölurætur. Sannið að $b = dk^2$, þar sem d og k eru heiltölur og d gengur upp í a.

Problem 7. Gerum ráð fyrir að fyrir frumtölu p og heiltölur a, b, c gildi eftirfarandi:

$$6 \mid p + 1, \quad p \mid a + b + c, \quad p \mid a^4 + b^4 + c^4.$$

Sannið að $p \mid a, b, c$.

Problem 8. Ákvarðið allar jákvæðar heiltölur n þannig að til er skipting á menginu

$$\{n, n+1, n+2, \ldots, n+8\}$$

í tvö sundurlæg hlutmengi þannig að margfeldi staka fyrra hlutmengisins sé jafnt margfeldi staka seinna hlutmengisins.

Problem 9. Finnið allar jákvæðar heiltölur n þannig að $2^{n+1} - n^2$ er frumtala.

Problem 10. Látum $d(k)$ tákna fjölda jákvæðra deila jákvæðu heiltölunnar k. Sannið að til eru óendanlega margar jákvæðar heiltölur M sem ekki er hægt að skrifa

$$M = \left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2$$

fyrir neina jákvæða heiltölu n.

Problem 11. Látum M vera miðpunkt hliðarinnar AC í þríhyrningi ABC, og látum K vera punkt á línunni BA þannig að A liggi á milli B og K. Línan KM sker hliðina BC í punktinum L. P er punkturinn á strikinu BM þannig að PM helmingi hornið LPK. Línan ℓ liggur í gegnum A samsíða BM. Sannið að ofanvarp punktsins M á línuna ℓ liggur á línunni PK.

Problem 12. Í ferhyrningi $ABCD$ höfum við $AB \parallel CD$ og $AB = 2CD$. Lína ℓ er hornrétt á CD og á henni er punkturinn C. Hringurinn með miðju D og geisla DA sker línuna ℓ í punktunum P og Q. Sannið að $AP \perp BQ$.

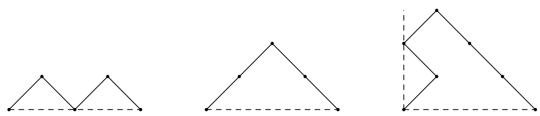
Problem 13. Punkturinn H er skurðpunktur hæða þríhyrnings ABC, og strikin AD, BE, CF eru hæðir hans. Punktarnir I_1, I_2, I_3 eru miðpunktar innrituðu hringa þríhyrninganna EHF, FHD, DHE. Sannið að línurnar AI_1, BI_2, CI_3 skerast í einum punkti.

Problem 14. Fyrir hvaða $n \geq 2$ er hægt að finna n þríhyrninga $A_1, A_2, \ldots, A_n$ þannig að engir tveir þeirra eru einslaga og hægt er að skipta hverjum þeirra upp í n þríhyrninga þannig að engir tveir litlu þríhyrninganna eru einslaga en hver þeirra er einslaga einum af þríhyrnigunum $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

Problem 15. Eininga ferningur er skorinn í m ferhyrninga $Q_1, \ldots, Q_m$. Fyrir sérhvert $i = 1, \ldots, m$ látum við S_i vera summu annars veldis hliðarlengdanna fjögurra í Q_i. Sannið að

$$S_1 + \ldots + S_m \geq 4.$$

Problem 16. n-*Þrándavegur* er vegur sem hefst í $(0,0)$, endar í $(2n, 0)$, sker hvergi sjálfan sig og er ávallt í fyrsta fjórðungi hnitakerfisins. Hverjum legg slíks vegar er lýst með einum vigranna $(1,1)$, $(1,-1)$ eða $(-1,1)$. (Myndin sýnir alla mögulega 2-Þrándavega.)



Finnið fjölda allra n-Þrándavegi.

Problem 17. Finnið stærstu heiltölu n þannig að til eru n ólíkar heiltölur sem engin er deilanleg með neinni talnanna 7, 11, og 13, en summa sérhverra tveggja þeirra er deilanleg með að minnsta kosti einni talnanna 7, 11, eða 13.

Problem 18. Látum $n > 2$ vera heiltölu. Í landi einu eru n borgir og sérhverjar tvær þeirra eru tengdar saman með vegi beint á milli sín. Sérhverjum vegi er úthlutuð heiltala úr menginu $\{1, 2, \ldots, m\}$ (mismunandi vegum getur verið úthlutuð sama heiltala). *Auðkenni* borgar er summa talnanna sem vegunum frá henni var úthlutað. Finnið minnsta m þannig að það er mögulegt að allar borgirnar hafi mismunandi auðkenni.

Problem 19. Í átta manna hópi, þekkja sérhverjir tveir hvor annan eða hvorugur þekkir hinn. Sérhver maður þekkir nákvæmlega þrjá aðra í hópnum. Ákvarðið hvort eftirfarandi tvö skilirði geti bæði gilt:

- fyrir sérhverja þrjá menn þekkjast að minnsta kosti tveir ekki innbyrðis,
- fyrir sérhverja fjóra menn eru að minnsta kosti tveir sem þekkjast.

Problem 20. Í Eystrasaltsborg framtíðarinnar eru 16 sjúkrahús. Á hverri nóttu sinna fjögur þeirra neiðarvakt. Er hægt að hafa vaktaskipulag þeirra þannig að eftir 20 nætur hafi sérhver tvö þeirra nákvæmlega einu sinni sinnt saman neiðarvaktinni?