*Latviešu*

# Baltijas ceļš 2009

## Tronheima, 2009. gada 7. novembris

Risināšanas laiks: $4\frac{1}{2}$ stundas.

Jautājumus var uzdot pirmo 30 minūšu laikā.

1. **uzdevums.** $n$-tās ($n \geq 2$) pakāpes polinomam $p(x)$ ir tieši $n$ reālas saknes (skaitot arī atkārtojumus). Zināms, ka koeficients pie $x^n$ ir 1, ka neviena sakne nav lielāka par 1 un ka $p(2) = 3^n$. Kādas ir iespējamās $p(1)$ vērtības?

2. **uzdevums.** Doti nenegatīvi veseli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, kas apmierina nevienādību

$$a_1 \cdot (a_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_1 - 20) + a_2 \cdot (a_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_2 - 20) + \\ \ldots + a_{100} \cdot (a_{100} - 1) \cdot \ldots \cdot (a_{100} - 20) \leq 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 79.$$

Pierādīt, ka $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} \leq 9900$.

3. **uzdevums.** Dots naturāls skaitlis $n$. Pierādiet, ka skaitļus $c_k \in \{-1, 1\}$ ($1 \leq k \leq n$) var izvēlēties tā, ka

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot k^2 \leq 4.$$

4. **uzdevums.** Atrast visus naturālos skaitļus $n > 1$, kuriem nevienādība

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})x_n$$

izpildās visām reālām $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vērtībām.

5. **uzdevums.** Dots, ka $f_0 = f_1 = 1$ un $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$ ($i \geq 0$). Atrast visas reālās saknes vienādojumam

$$x^{2010} = f_{2009} \cdot x + f_{2008}\,.$$

6. **uzdevums.** $a$ un $b$ ir tādi veseli skaitļi, ka vienādojuma $x^3 - ax^2 - b = 0$ trīs saknes ir veseli skaitļi. Pierādīt, ka $b = dk^2$, kur $d$ un $k$ ir veseli skaitļi un $a$ dalās ar $d$.

7. **uzdevums.** Dots, ka pirmskaitlim $p$ un veseliem skaitļiem $a, b, c$ izpildās:

$$6 \mid p + 1, \quad p \mid a + b + c, \quad p \mid a^4 + b^4 + c^4.$$

Pierādīt, ka $p \mid a, b, c$.

8. **uzdevums.** Atrast visus naturālos $n$, kuriem eksistē kopas

$$\{n, n+1, n+2, \ldots, n+8\}$$

sadalījums divās apakškopās, tāds, ka vienas apakškopas visu elementu reizinājums ir vienāds ar otras apakškopas visu elementu reizinājumu.

9. **uzdevums.** Atrast visus naturālos skaitļus $n$, kuriem $2^{n+1} - n^2$ ir pirmskaitlis.

10. **uzdevums.** Ar $d(k)$ apzīmē naturāla skaitļa $k$ pozitīvo dalītāju skaitu. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu $M$, kurus nevar izteikt formā

$$M = \left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2$$

ne pie kāda naturāla $n$.

11. **uzdevums.** $M$ ir trijstūra $ABC$ malas $AC$ viduspunkts, un $K$ atrodas uz stara $BA$ aiz punkta $A$. Taisne $KM$ krusto malu $BC$ punktā $L$. $P$ ir punkts uz nogriežņa $BM$, tāds, ka $PM$ ir leņķa $LPK$ bisektrise. Taisne $\ell$ iet caur punktu $A$ un ir paralēla $BM$. Pierādīt, ka punkta $M$ projekcija uz taisnes $\ell$ atrodas uz taisnes $PK$.

12. **uzdevums.** Četrstūrī $ABCD$ $AB \parallel CD$ un $AB = 2CD$. Taisne $\ell$ iet caur punktu $C$ un ir perpendikulāra $CD$. Riņķa līnija ar centru punktā $D$ un rādiusu $DA$ krusto taisni $\ell$ punktos $P$ un $Q$. Pierādīt, ka $AP \perp BQ$.

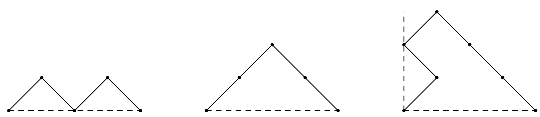
13. **uzdevums.** $AD, BE$ un $CF$ ir trijstūra $ABC$ augstumi, $H$ - augstumu krustpunkts. Punkti $I_1, I_2, I_3$ ir attiecīgi trijstūros $EHF, FHD, DHE$ ievilkto riņķa līniju centri. Pierādīt, ka taisnes $AI_1, BI_2, CI_3$ krustojas vienā punktā.

14. **uzdevums.** Kādiem $n \geq 2$ var atrast $n$ trijstūrus $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tādus, ka starp tiem nav divu līdzīgu un katru no tiem var sagriezt $n$ trijstūros, pirmais no kuriem ir līdzīgs $A_1$, otrais līdzīgs $A_2$, ..., $n$-tais līdzīgs $A_n$?

15. **uzdevums.** Kvadrāts ar malas garumu 1 ir sagriezts $m$ četrstūros $Q_1, \ldots, Q_m$. Katram $i = 1, \ldots, m$ ar $S_i$ apzīmēsim četrstūra $Q_i$ visu malu garumu kvadrātu summu. Pierādīt, ka

$$S_1 + \ldots + S_m \geq 4.$$

16. **uzdevums.** *$n$-trønder ceļš* ir sevi nekrustojoša lauzta līnija, kas sākas punktā $(0,0)$, beidzas punktā $(2n, 0)$, neiziet ārpus pirmā kvadranta un kuras katrs posms ir viens no vektoriem $(1,1)$, $(1,-1)$ vai $(-1,1)$. (Zīmējumā ir attēloti iespējamie 2-trønder ceļi.)



Nosakiet $n$-trønder ceļu skaitu katram $n$.

17. **uzdevums.** Atrast lielāko naturālo $n$, tādu, ka eksistē $n$ dažādi veseli skaitļi, kas nedalās ne ar vienu no skaitļiem 7, 11, 13, bet jebkuru divu šo skaitļu summa dalās vismaz ar vienu no skaitļiem 7, 11, 13.

18. **uzdevums.** Dots, ka $n > 2$ ir naturāls skaitlis. Kādā valstī ir $n$ pilsētas un starp katrām divām no tām ir uzbūvēts ceļš. Katram ceļam kā numuru piešķir skaitli no kopas $\{1, 2, \ldots, m\}$ (dažādiem ceļiem var būt viens un tas pats numurs). Pilsētas *kods* ir to ceļu numuru summa, kas iziet no šīs pilsētas. Atrast mazāko $m$ pie kura ir iespējams, ka visām $n$ pilsētām ir dažādi kodi.

19. **uzdevums.** Pasākumā piedalās 8 dalībnieki. Katri divi dalībnieki vai nu ir, vai nav savstarpēji pazīstami. Zināms, ka katrs dalībnieks ir pazīstams ar tieši trīs citiem. Noskaidrojiet, vai sekojoši divi nosacījumi var izpildīties vienlaicīgi:

-- Starp katriem trijiem dalībniekiem var atrast divus, kuri nav pazīstami;

-- Starp katriem četriem dalībniekiem var atrast divus, kuri ir pazīstami.

20. **uzdevums.** Baltijas ceļa galvaspilsētā ir 16 slimnīcas. Katru nakti dežūrē tieši 4 no tām. Vai ir iespējams dežūru sarakstu sastādīt tā, ka pēc 20 naktīm katras divas slimnīcas vienlaicīgi ir dežūrējušas tieši vienu reizi?