Varžybos trunka $4\frac{1}{2}$ val.
Klausimus galima užduoti per pirmąsias 30 min.

1. Daugianaris $p(x)$, kurio laipsnis $n \geq 2$, o koeficientas prie x^n lygus 1, turi lygiai n realiųjų šaknų, skaičiuojant su pasikartojimais. Visos šaknys yra ne didesnės už 1; be to, $p(2) = 3^n$. Kokias reikšmes gali įgyti $p(1)$?

2. Neneigiami sveikieji skaičiai $a_1, \ldots, a_{100}$ tenkina nelygybę
$a_1 \cdot (a_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_1 - 20) + a_2 \cdot (a_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_2 - 20) + \ldots + a_{100} \cdot (a_{100} - 1) \cdot \ldots \cdot (a_{100} - 20) \leq 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 79.$
Įrodykite, kad $a_1 + \ldots + a_{100} \leq 9900$.

3. Duotas natūralusis skaičius *n*. Įrodykite, kad skaičius $c_k \in \{-1, 1\}$ $(1 \leq k \leq n)$ galima parinkti taip, kad galiotų nelygybės

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot k^2 \leq 4.$$

4. Raskite visus sveikuosius $n > 1$, kuriems nelygybė

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})x_n$$

galioja su bet kokiais realiaisiais $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

5. Tegu $f_0 = f_1 = 1$ ir $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$ $(i \geq 0)$. Raskite visus realiuosius lygties

$$x^{2010} = f_{2009}\, x + f_{2008}$$

sprendinius.

6. *a* ir *b* yra tokie sveikieji skaičiai, kad lygtis $x^3 - ax^2 - b = 0$ turi tris sveikuosius sprendinius. Įrodykite, kad $b = dk^2$, kur *d* ir *k* yra sveikieji skaičiai ir *a* dalijasi iš *d*.

7. Tarkime, kad

$$6 \mid p+1, \; p \mid a+b+c, \; p \mid a^4+b^4+c^4,$$

kur *p* yra pirminis skaičius, o *a*, *b*, *c* - sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad $p \mid a, b, c$.

8. Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius *n*, kuriems aibę $\{n, n+1, n+2, \ldots, n+8\}$ būtų galima išskaidyti į du nesikertančius poaibius, kurių pirmojo visų elementų sandauga būtų lygi antrojo poaibio visų elementų sandaugai.

9. Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius *n*, kad $2^{n+1} - n^2$ yra pirminis skaičius.

10. Tegu $d(k)$ žymi natūraliojo skaičiaus *k* teigiamų daliklių skaičių. Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug natūraliųjų skaičių *M*, kurių neįmanoma užrašyti pavidalu

$$M = \left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)} \right)^2$$

jokiam natūraliajam *n*.

11. M yra trikampio ABC kraštinės AC vidurio taškas, o taškas K yra spindulio BA taškas, nepriklausantis atkarpai BA. Tiesė KM kerta kraštinę BC taške L. P yra toks atkarpos BM taškas, kad PM yra kampo LPK pusiaukampinė. Tiesė l eina per tašką A ir yra lygiagreti BM. Įrodykite, kad taško M projekcija į tiesę l priklauso tiesei PK.

12. Keturkampio $ABCD$ kraštinės tenkina sąlygas $AB \parallel CD$ ir $AB = 2CD$. Tiesė l statmena CD ir eina per tašką C. Apskritimas, kurio centras yra taškas D, o spindulys – DA, kerta tiesę l taškuose P ir Q. Įrodykite, kad $AP \perp BQ$.

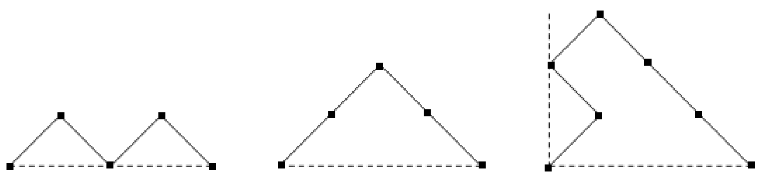
13. Taškas H yra trikampio ABC ortocentras, o AD, BE, CF – jo aukštinės. Taškai I_1, I_2, I_3 yra atitinkamai trikampių EHF, DHF, DHE įbrėžtinių apskritimų centrai. Įrodykite, kad tiesės AI_1, BI_2, CI_3 kertasi viename taške.

14. Kuriems $n \geq 2$ egzistuoja tokie n paporiui nepanašių trikampių $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kurių kiekvieną galima padalyti į n paporiui nepanašių trikampių, kiekvienas iš kurių yra panašus į vieną iš trikampių $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

15. Vienetinis kvadratas sukarpytas į m keturkampių $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$. Kiekvienam $i = 1, \ldots, m$ apibrėžkime S_i kaip keturkampio Q_i visų keturių kraštinių kvadratų sumą. Įrodykite, kad

$$S_1 + \ldots + S_m \geq 4.$$

16. Laužtinis n-kelias yra kelias, prasidedantis taške (0, 0), užsibaigiantis taške ($2n$, 0), neinantis per jokį tašką du kartus, pilnai esantis pirmajame stačiakampės koordinačių sistemos ketvirtyje ir kurio kiekvienas žingsnis yra vienas iš vektorių (1,1), (1, -1) arba (-1, 1). (Paveikslėlyje parodytos visi galimi laužtiniai 2-keliai). Kiekvienam natūraliajam n raskite laužtinių n-kelių skaičių.



17. Raskite didžiausią tokį natūralųjį n, kuriam egzistuoja tokie n skirtingų sveikųjų skaičių, kad nei vienas iš jų nėra dalus iš 7, 11 ir 13, tačiau bet kurių dviejų iš jų suma yra dali iš bent vieno iš skaičių 7, 11 ir 13.

18. $n > 2$ yra natūralusis skaičius. Šalyje yra n miestų ir bet kurie du miestai yra tiesiogiai sujungti keliu. Kiekvienam keliui priskirtas aibės $\{1, 2, \ldots, m\}$ elementas (tas pats skaičius gali būti priskirtas skirtingiems keliams). Miesto pirmumo indeksu vadinsime iš to miesto išeinantiems keliams priskirtų skaičių sumą. Raskite tokį mažiausią m, kuriam yra įmanoma, kad visi miestai turėtų skirtingus pirmumo indeksus.

19. Aštuonių žmonių vakarėlyje bet kurie du dalyviai arba pažįsta vienas kitą, arba nepažįsta vienas kito. Kiekvienas dalyvis pažįsta lygiai tris kitus. Nustatykite, ar gali šios dvi sąlygos galioti vienu metu:

- iš bet kurių trijų dalyvių bent du vienas kito nepažįsta;
- iš bet kurių keturių dalyvių bent du vienas kitą pažįsta.

20. Baltijos Kelio ateities mieste yra 16 ligoninių. Kasnakt turi budėti lygiai keturios iš jų. Ar ligoninių tvarkaraštį galima sudaryti taip, kad po 20 naktų bet kurios dvi ligoninės būtų budėjusios kartu lygiai vieną kartą?