Norsk

Baltic Way 2009

Trondheim, 7. november 2009

Tillatt tid: $4\frac{1}{2}$ time.

Spørsmål kan stilles i løpet av de første 30 minuttene.

Oppgave 1. Et polynom $p(x)$ av grad $n \geq 2$ har akkurat n reelle røtter, regnet med multiplisitet. Koeffisienten til x^n er 1, alle røttene er mindre enn eller lik 1, og $p(2) = 3^n$. Hvilke verdier kan $p(1)$ anta?

Oppgave 2. La $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ være ikkenegative heltall som tilfredsstiller ulikheten

$$a_1 \cdot (a_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_1 - 20) + a_2 \cdot (a_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_2 - 20) + \\ \ldots + a_{100} \cdot (a_{100} - 1) \cdot \ldots \cdot (a_{100} - 20) \leq 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 79.$$

Vis at $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} \leq 9900$.

Oppgave 3. La n være et gitt positivt heltall. Vis at vi kan finne tall $c_k \in \{-1, 1\}$ $(1 \leq k \leq n)$ slik at

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot k^2 \leq 4.$$

Oppgave 4. Bestem alle naturlige tall $n > 1$ slik at ulikheten

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})x_n$$

holder for alle reelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Oppgave 5. La $f_0 = f_1 = 1$ og $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$ $(i \geq 0)$. Finn alle reelle løsninger av likningen

$$x^{2010} = f_{2009} \cdot x + f_{2008}\,.$$

Oppgave 6. La a og b være heltall slik at likningen $x^3 - ax^2 - b = 0$ har tre heltallige røtter. Vis at $b = dk^2$, der d og k er heltall og d går opp i a.

Oppgave 7. Anta at for et primtall p og heltall a, b, c gjelder:

$$6 \mid p + 1, \quad p \mid a + b + c, \quad p \mid a^4 + b^4 + c^4.$$

Vis at $p \mid a, b, c$.

Oppgave 8. Bestem alle positive heltall n slik at det finnes en oppdeling av mengden

$$\{n, n+1, n+2, \ldots, n+8\}$$

i to delmengder slik at produktet av alle elementene i den ene delmengden er like stort som produktet av alle elementene i den andre delmengden.

Oppgave 9. Bestem alle positive heltall n slik at $2^{n+1} - n^2$ er et primtall.

Oppgave 10. La $d(k)$ betegne antall positive divisorer av et naturlig tall k. Vis at det finnes uendelig mange positive heltall M som ikke kan skrives som

$$M = \left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2$$

for noe positivt heltall n.

Oppgave 11. La M være midtpunktet på siden AC i trekant ABC, og la K være et punkt på strålen BA slik at A ligger mellom B og K. Linjen KM skjærer siden BC i punktet L. P er punktet på linjestykket BM slik at PM halverer vinkel LPK. Linjen ℓ går gjennom A og er parallell med BM. Vis at projeksjonen av punktet M på linjen ℓ ligger på linjen PK.

Oppgave 12. I en firkant $ABCD$ er $AB \parallel CD$ og $AB = 2CD$. En linje ℓ står normalt på CD og går gjennom C. Sirkelen med sentrum i D og radius DA skjærer linjen ℓ i punktene P og Q. Vis at $AP \perp BQ$.

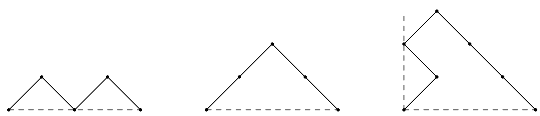
Oppgave 13. Punktet H er ortosenteret i trekant ABC, og linjestykkene AD, BE, CF er høydene i trekanten. Punktene I_1, I_2, I_3 er innsentrene i trekanten EHF, FHD, DHE, henholdsvis. Vis at linjene AI_1, BI_2, CI_3 skjærer hverandre i ett punkt.

Oppgave 14. For hvilke $n \geq 2$ er det mulig å finne n parvis ikke-formlike trekanter $A_1, A_2, \ldots, A_n$ slik at hver av dem kan deles opp i n parvis ikke-formlike trekanter, der hver av disse er formlik med en av $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

Oppgave 15. Et kvadrat med side 1 deles opp i m firkanter $Q_1, \ldots, Q_m$. For hver $i = 1, \ldots, m$ lar vi S_i være summen av kvadratene av sidelengdene i Q_i. Vis at

$$S_1 + \ldots + S_m \geq 4.$$

Oppgave 16. En *n-trøndervandring* er en vandring som starter i $(0, 0)$ og ender i $(2n, 0)$, slik at vandringen finner sted i første kvadrant, er ikke innom noe punkt flere ganger, og hvert steg kan representeres ved en av vektorene $(1, 1)$, $(1, -1)$ eller $(-1, 1)$. (Figuren viser alle mulige 2-trøndervandringer.)



Finn antall slike n-trøndervandringer.

Oppgave 17. Finn det største naturlige tall n slik at det finnes n ulike heltall, ingen av dem delelig med 7, 11 eller 13, slik at summen av hver to av dem er delelig med minst ett av tallene 7, 11 og 13.

Oppgave 18. La $n > 2$ være et heltall. I et land finnes det n byer, og alle par av disse er forbundet med en direkte vei. Til hver slik vei tilordnes et heltall fra mengden $\{1, 2, \ldots, m\}$ (ulike veier kan bli tilordnet samme tall). *Prioriteten* til en by er summen av tallene tilordnet veiene som leder til denne byen. Finn den minste m slik at det er mulig at alle byene har ulik prioritet.

Oppgave 19. På en fest med åtte personer vil hvert par av personer enten kjenne hverandre eller ikke kjenne hverandre. Hver person kjenner nøyaktig tre av de andre. Avgjør om følgende to betingelser kan tilfredsstilles samtidig:

- Blant tre personer vil det alltid finnes to som ikke kjenner hverandre.

- Blant fire personer vil det alltid finnes to som kjenner hverandre.

Oppgave 20. I den framtidige byen Baltic Way er det seksten leger. Hver natt må nøyaktig fire av dem være på akuttvakt. Er det mulig å sette opp et vaktskjema på en slik måte at etter tjue netter har hvert par av leger vært på felles vakt nøyaktig én gang?