Polski

Baltic Way 2009

Trondheim, 7 listopada

Czas trwania $4\frac{1}{2}$ godziny.

Pytania mogą być zadawane przez pierwszych 30 minut.

Zadanie 1. Wielomian $p(x)$ stopnia $n \geqslant 2$ posiada dokładnie n pierwiastków rzeczywistych (licząc z krotnościami), współczynnik przy x^n równy 1, wszystkie jego pierwiastki są mniejsze bądź równe 1, zaś $p(2) = 3^n$. Jakie wartości może przyjmować $p(1)$?

Zadanie 2. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ będą liczbami całkowitymi nieujemnymi spełniającymi nierówność

$$a_1 \cdot (a_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_1 - 20) + a_2 \cdot (a_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_2 - 20) + \\ \ldots + a_{100} \cdot (a_{100} - 1) \cdot \ldots \cdot (a_{100} - 20) \leqslant 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 79.$$

Wykazać, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} \leqslant 9900$.

Zadanie 3. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wykazać, że można tak wybrać liczby $c_k \in \{-1, 1\}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, by

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot k^2 \leqslant 4.$$

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n > 1$, dla których nierówność

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})x_n$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Zadanie 5. Niech $f_0 = f_1 = 1$ oraz $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$ $(i \geqslant 0)$. Znaleźć wszystkie rzeczywiste pierwiastki równania

$$x^{2010} = f_{2009} \cdot x + f_{2008} \, .$$

Zadanie 6. Niech a oraz b będą takimi liczbami całkowitymi, że równanie $x^3 - ax^2 - b = 0$ posiada trzy pierwiastki całkowite. Pokazać, że $b = dk^2$, gdzie d i k są całkowite, oraz d dzieli a.

Zadanie 7. Załóżmy, że dla pewnej liczby pierwszej p oraz liczb całowitych a, b, c spełnione są warunki:

$$6 \mid p + 1, \quad p \mid a + b + c, \quad p \mid a^4 + b^4 + c^4.$$

Wykazać, że $p \mid a$, $p \mid b$ oraz $p \mid c$.

Zadanie 8. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których zbiór

$$\{n, n+1, n+2, \ldots, n+8\}$$

można przedstawić w postaci sumy dwóch rozłącznych podzbiorów takich, że iloczyn wszystkich elementów pierwszego podzbioru jest równy iloczynowi wszystkich elementów drugiego podzbioru.

Zadanie 9. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których $2^{n+1} - n^2$ jest liczbą pierwszą.

Zadanie 10. Niech $d(k)$ oznacza liczbę wszystkich naturalnych dzielników dodatniej liczby całkowitej k. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich M, których nie można przedstawić w postaci

$$M = \left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2$$

dla żadnej liczby całkowitej dodatniej n.

Zadanie 11. Niech M będzie środkiem boku AC trójkąta ABC, a K — punktem półprostej BA leżącym poza odcinkiem BA. Prosta KM przecina bok BC w punkcie L, a P jest takim punktem odcinka BM, że półprosta PM jest dwusieczną kąta LPK. Prosta ℓ jest równoległa do BM i przechodzi przez punkt A. Wykazać, że rzut prostopadły punktu M na prostą ℓ leży na prostej PK.

Zadanie 12. Niech czworokąt $ABCD$ będzie taki, że $AB \parallel CD$ oraz $AB = 2CD$. Prosta ℓ jest prostopadła do CD i przechodzi przez punkt C. Okrąg o środku D i promieniu DA przecina prostą ℓ w punktach P i Q. Pokazać, że $AP \perp BQ$.

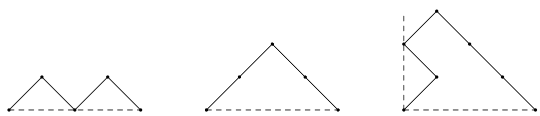
Zadanie 13. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC, a odcinki AD, BE, CF — jego wysokościami. Środkami okręgów wpisanych w trójkąty EHF, FHD, DHE są punkty, odpowiednio, I_1, I_2, I_3. Wykazać, że proste AI_1, BI_2, CI_3 przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 14. Dla jakich $n \geqslant 2$ można znaleźć trójkąty $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takie, że żadne dwa z nich nie są podobne, natomiast dowolny można podzielić na n trójkątów, z których każdy jest dla pewnego $i \in \{1, \ldots, n\}$ podobny do trójkąta A_i, przy czym żadne dwa do tego samego?

Zadanie 15. Kwadrat jednostkowy podzielono na czworokąty $Q_1, \ldots, Q_m$. Niech dla $i = 1, \ldots, m$ suma kwadratów wszystkich boków czworokąta Q_i wynosi S_i. Wykazać, że

$$S_1 + \ldots + S_m \geqslant 4.$$

Zadanie 16. *Spacerem Trondheimczyka n–tego poziomu* nazywamy drogę z punktu $(0,0)$ do punktu $(2n, 0)$ zawartą w I ćwiartce układu współrzędnych, bez samoprzecięć, której każdy krok jest wyznaczony przez jeden z wektorów $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$. (Rysunek obok pokazuje spacery Trondheimczyka drugiego poziomu.)



Wyznaczyć liczbę różnych spacerów Trondheimczyka n–tego poziomu.

Zadanie 17. Znaleźć największą liczbę całkowitą n, dla której istnieje n różnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 7, 11, ani 13 takich, że suma każdych dwóch z nich jest podzielna przez 7, 11 lub 13.

Zadanie 18. Niech $n > 2$ będzie liczbą całkowitą. W pewnym kraju jest n miast i każde dwa z nich łączy droga omijająca pozostałe. Każdej z dróg przypisujemy liczbę ze zbioru $\{1, 2, \ldots, m\}$ (niekoniecznie różną dla różnych dróg). *Rangą* miasta nazywamy sumę liczb przypisanych wszystkim drogom z niego wychodzącym. Wyznaczyć najmniejsze m, dla którego istnieje przypisanie nadające różnym miastom różne rangi.

Zadanie 19. W grupie ośmiu osób każde dwie znają się wzajemnie albo wzajemnie się nie znają. Każda osoba zna dokładnie trzy inne. Stwierdzić, czy poniższe warunki mogą zachodzić jednocześnie:

– wśród dowolnych trzech osób przynajmniej dwie nie znają się;

– wśród dowolnych czterech osób co najmniej dwie znają się.

Zadanie 20. W mieście przyszłości Baltic Way znajduje się szesnaście szpitali. Każdej nocy dokładnie cztery z nich pełnią dyżur. Czy można ustalić dyżury w taki sposób, by po upływie dwudziestu nocy każda para szpitali odbyła wspólnie dokładnie jeden dyżur?