Русская версия

Baltic Way 2009

Trondheim, November 7, 2009

Длительность олимпиады 4,5 часа
Вопросы по условиям принимаются в письменном виде первые 30 минут.

1. Многочлен $p(x)$ степени $n \geqslant 2$ с единичным старшим коэффициентом имеет n вещественных корней (с учетом кратности). Все его корни не превосходят 1. Известно, что $p(2) = 3^n$. Какие значения может принимать $p(1)$?

2. Натуральные числа $a_1, \ldots, a_{100}$ удовлетворяют неравенству
$$a_1 \cdot (a_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_1 - 20) + a_2 \cdot (a_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (a_2 - 20) + \\ + \ldots + a_{100} \cdot (a_{100} - 1) \cdot \ldots \cdot (a_{100} - 20) \leqslant 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 79.$$
Докажите, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} \leqslant 9900$.

3. Дано натуральное число n. Докажите, что можно выбрать числа $c_k \in \{-1, 1\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ так, что
$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot k^2 \leqslant 4.$$

4. Для каких натуральных $n > 1$ неравенство
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})x_n$$
выполняется при всех вещественных $x_1, x_2, \ldots, x_n$?

5. Пусть $f_0 = f_1 = 1$, $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$, $i \geqslant 0$. Найдите все вещественные корни уравнения
$$x^{2010} = f_{2009} \cdot x + f_{2008}.$$

6. Пусть a и b — такие целые числа, что уравнение $x^3 - ax^2 - b = 0$ имеет три целых корня. Докажите, что $b = dk^2$, где d и k — целые числа, причем d — делитель a.

7. Дано простое число p и целые числа a, b и c такие, что
$$p + 1 \,\vdots\, 6, \qquad a + b + c \,\vdots\, p, \qquad a^4 + b^4 + c^4 \,\vdots\, p.$$
Докажите, что числа a, b и c делятся на p.

8. Найдите все натуральные n, для которых множество $\{n, n+1, \ldots, n+8\}$ можно разбить на две части с равными произведениями.

9. Найдите все натуральные n, для которых $2^{n+1} - n^2$ — простое число.

10. Обозначим через $d(k)$ количество натуральных делителей числа k. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел M, которые нельзя представить в виде
$$M = \left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2$$
с натуральным n.

11. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. На луче BA за точкой A отмечена точка K. Прямая KM пересекает отрезок BC в точке L. Точка P на отрезке BM такова, что PM — биссектриса угла LPK. Прямая ℓ проходит через точку A и параллельна BM. Докажите, что проекция точки M на прямую ℓ лежит на прямой PK.

12. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $AB = 2CD$. Прямая ℓ проходит через точку C и перпендикулярна CD. Окружность с центром D и радиусом DA пересекает прямую ℓ в точках P и Q. Докажите, что $AP \perp BQ$.

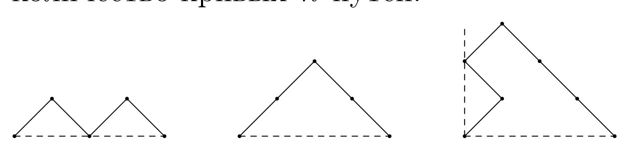
13. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, а отрезки AD, BE и CF — его высоты. Точки I_1, I_2, I_3 — центры вписанных окружностей треугольников EHF, FHD и DHE соответственно. Докажите, что прямые AI_1, BI_2 и CI_3 пересекаются в одной точке.

14. При каких $n \geqslant 2$ существуют n попарно не подобных треугольников A_1, A_2, $\ldots$, A_n, каждый из которых можно разрезать на n таких треугольников, что один из них подобен A_1, другой подобен A_2, $\ldots$, последний подобен A_n.

15. Единичный 1×1 разрезан на m четырехугольников Q_1, Q_2, $\ldots$, Q_m. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ обозначим через S_i сумму квадратов четырех сторон Q_i. Докажите, что

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_m \geqslant 4.$$

16. Кривым n-путем называется несамопересекающийся путь, идущий из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$ и целиком лежащий в первом квадранте, каждое звено которого направлено вдоль вектора $(1, 1)$, $(1, -1)$ или $(-1, 1)$. (При $n = 2$ существуют три таких пути, см. рисунок.) Найдите количество кривых n-путей.



17. Для какого наибольшего n существуют n различных натуральных чисел, ни одно из которых не делится ни на 7, ни на 11, ни на 13, и при этом сумма любых двух из них делится хотя бы на одно из чисел 7, 11 и 13.

18. Дано натуральное число $n > 2$. В стране n городов, любые два из которых напрямую соединены дорогой. Каждой дороге сопоставлено число из множества $\{1, \ldots, m\}$ (разным дорогам могут быть сопоставлены одинаковые числа). *Весом* города называется сумма чисел, сопоставленных всем выходящим из него дорогам. При каком наименьшем m веса всех городов могут оказаться различными?

19. В компании из 8 человек каждые два участника либо знакомы, либо нет. Каждый знаком ровно с тремя из остальных. Могут ли одновременно выполняться два условия:

    — среди любых трех участников найдутся двое незнакомых;

    — среди любых четырех участников найдутся двое знакомых?

20. В одном балтийском городе имеется 16 госпиталей. Каждую ночь ровно 4 из них должны находиться на дежурстве. Можно ли создать такой график дежурств, что после 20 ночей любые два госпиталя ровно один раз вместе находились на дежурстве?