Svenska

Baltic Way 2009

Trondheim, November 7, 2009

Skrivtid: $4\frac{1}{2}$ timme.
Frågor kan ställas under de första 30 minuterna av skrivtiden.

Problem 1. Polynomet $p(x)$, av grad $n \geq 2$, har exakt n reella rötter, räknade med multiplicitet. Vi vet att koefficienten för x^n är 1, att alla rötterna är mindre än eller lika med 1 och att $p(2) = 3^n$. Vilka är de möjliga värdena för $p(1)$?

Problem 2. De icke-negativa heltalen $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ uppfyller olikheten

$$a_1(a_1-1)\cdots(a_1-20) + a_2(a_2-1)\cdots(a_2-20) + \cdots + a_{100}(a_{100}-1)\cdots(a_{100}-20) \leq 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 79.$$

Visa att $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} \leq 9900$.

Problem 3. Låt n vara ett givet positivt heltal. Visa att det går att välja talen $c_k \in \{-1, 1\}$ så att

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot k^2 \leq 4.$$

Problem 4. Finn alla heltal $n > 1$ sådana att olikheten

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})\, x_n$$

gäller för alla reella tal $x_1, x_2 \ldots, x_n$.

Problem 5. Låt $f_0 = f_1 = 1$ och $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$ $(i \geq 0)$. Finn alla reella lösningar till ekvationen

$$x^{2010} = f_{2009} \cdot x + f_{2008}.$$

Problem 6. Låt a och b vara heltal sådana att ekvationen $x^3 - ax^2 - b = 0$ har tre heltalslösningar. Visa att $b = dk^2$, för några heltal d och k sådana att d delar a.

Problem 7. Antag att för primtalet p och heltalen a, b, c gäller följande:

$$6 \mid p+1, \quad p \mid a+b+c, \quad p \mid a^4 + b^4 + c^4.$$

Visa att $p \mid a, b, c$.

Problem 8. Finn alla positiva heltal n för vilka det finns en partition av mängden

$$\{n, n+1, n+2, \ldots, n+8\}$$

i två delmängder, sådana att produkten av alla element i den första delmängden är lika med produkten av alla element i den andra delmängden.

Problem 9. Finn alla positiva heltal n sådana att $2^{n+1} - n^2$ är ett primtal.

Problem 10. Låt $d(k)$ vara antalet positiva delare till det positiva heltalet k. Visa att det finns oändligt många positiva heltal M som inte kan skrivas som

$$M = \left(\frac{2\sqrt{n}}{d(n)}\right)^2$$

för något positivt heltal n.

Problem 11. Låt punkten M vara mittpunkten på sidan AC i triangeln ABC och låt punkten K ligga på strålen BA, bortom punkten A. Linjen KM skär sidan BC i punkten L. Punkten P på sträckan BM är sådan att PM är bisektrisen till vinkeln LPK. Linjen ℓ är parallell med BM och går genom A. Visa att projektionen av M på linjen ℓ ligger på linjen PK.

Problem 12. I en fyrhörning $ABCD$ är $AB \parallel CD$ och $AB = 2CD$. Linjen ℓ är vinkelrät mot CD och går genom punkten C. Cirkeln med centrum i D och radie DA skär linjen ℓ i punkterna P och Q. Visa att $AP \perp BQ$.

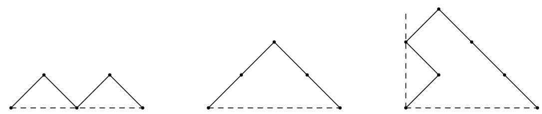
Problem 13. Punkten H är skärningspunkten för höjderna AD, BE och CF i triangeln ABC. Punkterna I_1, I_2 och I_3 är centra för de inskrivna cirklarna i trianglarna EHF, FHD, respektive DHE. Visa att linjerna AI_1, BI_2 och CI_3 skär varandra i en enda punkt.

Problem 14. För vilka $n \geq 2$ går det att finna n parvis icke-likformiga trianglar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sådana att var och en av dem kan delas upp i n parvis icke-likformiga trianglar, var och en likformig med en av $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

Problem 15. En kvadrat med sidan 1 klipps isär till m fyrhörningar $Q_1, \ldots, Q_m$. För $i = 1, 2, \ldots, m$ låt S_i vara summan av kvadraterna av sidorna i Q_i. Visa att

$$S_1 + \cdots + S_m \geq 4.$$

Problem 16. En *n-trøndervandring* är en vandring som startar i $(0,0)$, slutar i $(2n,0)$, utan att skära sig själv eller lämna första kvadranten, och där varje steg är en av vektorerna $(1,1)$, $(1,-1)$ eller $(-1,1)$. (Figuren visar alla möjliga 2-trøndervandringar.)



Bestäm antalet möjliga n-trøndervandringar.

Problem 17. Finn det största heltalet n för vilket det finns n olika heltal sådana att inget av dem är delbart med vare sig 7, 11 eller 13, men summan av vilka två som helst av dem är delbar med åtminstone ett av talen 7, 11 eller 13.

Problem 18. Låt $n > 2$ vara ett heltal. I ett land finns n städer, och mellan varje par av dem finns en direkt väg. Varje väg tilldelas ett heltal från mängden $\{1, 2, \ldots, m\}$ (olika vägar kan tilldelas samma tal). En stads *prioritet* är summan av talen som tilldelats de vägar som leder till den. Finn det minsta m som gör det möjligt för alla städer att ha olika prioritet.

Problem 19. I en grupp om åtta personer, gäller att varje par av personer antingen känner varandra eller inte känner varandra. Varje person känner precis tre av de andra. Avgör om bägge följande villkor kan uppfyllas samtidigt:

- I varje grupp om tre personer finns minst två som inte känner varandra.
- I varje grupp om fyra personer finns minst två som känner varandra.

Problem 20. I den framtida staden Baltic Way finns sexton sjukhus. Varje natt måste precis fyra av dem vara öppna för akutfall. Är det möjligt att lägga schemat så att varje par av sjukhus har haft nattjänstgöring samtidigt precis en gång efter tjugo nätter?